

YLIOPISTO-OPISKELIJOIDEN VIRHEKÄSITYKSET INTEGRAALILASKENNASSA INSINÖÖRIMATEMATIIKAN OPINTOJAKSOILLA

Juulia Auvinen
11.5.2021

Sisältö

Johdanto

Tutkimuskysymykset

Opintojaksot

Aineisto

Analyysi

Tulokset

Pohdinta

Johdanto

- Tampereen yliopistolla toteutettiin lukuvuonna 2019-2020 ensimmäistä kertaa Insinöörimatematiikka 1, 2, 3 ja 5 käänteiseen oppimiseen perustuvalla opetusmenetelmällä
 - tavoitteena matemaattisen osaamisen nostaminen vaaditulle tasolle
- Matematiikan osa-alueista erityisesti integraalilaskenta on keskeinen osa insinöörikoulutusta.

Tutkimuskysymykset

1. Millaisia virhekäsityksiä ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoilla on integraalilaskentaan liittyen?
2. Kuinka heikoimpien opiskelijoiden matemaattinen osaaminen eroaa integraalilaskennassa käsitteellisen ymmärryksen ja proseduraalisen sujuvuuden osalta käänteisen ja perinteisen opetusmenetelmän välillä?

Opintojaksot

Käänteinen malli (C-sarja)

- Ei perinteisiä luentoja
- Laskuharjoitustilaisuus (2h)
- Prime time –tilaisuus (2h)
- Itse- ja vertaisarvioinnit
- Loppuarviointi
 - 70 % laskuharjoituksista, 30 % tentistä (ei pakollinen)
- Opiskelijakeskeisyys, yhteisöllinen oppiminen

Perinteinen malli (B-sarja)

- Luennot (2x2h)
- Laskuharjoitustilaisuus (2x2h)
- Loppuarviointi
 - 50 % laskuharjoituksista, 50 % tentistä (pakollinen)
- Myös nykyaikaisia opetusmenetelmiä
 - Videoita, pienryhmäkeskusteluja

TUTKIMUS

Aineisto

- Tutkimuksen kohdejoukoksi valikoitui perustaitotestistä alle 8 pistettä saaneet opiskelijat
 - käänteiseltä mallilta 11 opiskelijaa ja perinteiseltä mallilta 24 opiskelijaa
- Tutkimuksen aineisto kerättiin Insinöörimatematiikka 1 ja 3 –opintojaksojen tenttivastauksista

3) a) Osoita erotusosamäärän raja-arvon kautta, että funktion $f(x) = x^2 + 3x$ derivaatta on $f'(x) = 2x + 3$.

b) Laske integraali

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin(x) \cos^2(x) dx.$$

1. (a) Integroi $f(t) = t^2 \sin(t)$.

(b) Arvioi integraalia $\int_0^3 2x + 1 dx$ hyödyntäen Riemannin summaa

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$ niin, että käytät tasavälistä jakoa n osaväliin ja pisteinä x_i^* osavälin oikeanpuoleisia päätepisteitä.

Analyysi

- Tutkimusmenetelmänä laadullinen tutkimus
 - teoriaohjaava sisällönanalyysi
- Alkuperäisdatan pelkistämisen jälkeen IMA1-tenttejä jäi analysoitavaksi 23 kpl ja IMA3-tenttejä 18 kpl
- Tenteistä löytyneet virheet yhdisteltiin alaluokiksi, jotka yhdisteltiin edelleen yläluokiksi
 - yläluokat jaoteltiin käsitteellisiin, proseduraalisiin (ja teknisiin) virheisiin
- Aineistoa käsiteltiin lisäksi määrällisin keinoin

TULOKSIA

Proseduraaliset virheet

Alaluokat	Yläluokat
$\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$	Tulon tekijöiden integrointi erikseen
$\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$	
$\int g(f(x))dx = G(F(x))$	Virheet yhdistetyn funktion integroinnissa
$\int g(f(x))dx = g(F(x))$	
$\int_a^b F(x) = F(a) - F(b)$	Virheet määrätyn integraalin rajojen sijoituksessa
$\int_a^b (F(x) + G(x)) = F(b) + G(a)$	
$\int_a^b (F(x)G(x)) = F(b) \cdot G(a)$	
$\int g(f(x))dx = G(f(x)) \cdot F(x)$	Integroinnin ja derivoinnin sekoittuminen
$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) + f(x)G(x)$	
$\int f(x)^n dx = nF(x)^{n-1}$	
$\int \sin(x)dx = \cos(x)$	
Muut proseduraaliset integrointivirheet	

Handwritten calculation on grid paper showing a common error in integration by parts. The integral is $\int_{-\pi/3}^{2\pi/3} \sin(x) \cos^2(x) dx$. The student incorrectly applies the formula $\int u dv = uv - \int v du$ with $u = \sin(x)$ and $v = \cos^2(x)$, resulting in $\frac{1}{2} \cos^2(x) \sin(x) - \frac{1}{3} \sin^3(x)$. The final result is underlined in red.

Handwritten integration by parts calculation: $F(t) = \int t^2 \sin(t)$. The student uses the formula $\int u dv = uv - \int v du$ with $u = t^2$ and $v = \sin(t)$, resulting in $\frac{1}{3} t^3 \sin(t) + t^2 \cdot (-\cos(t))$.

Käsitteelliset virheet

Alaluokat	Yläluokat
Virheet sijoitusmerkin käyttämisessä	Määrättyyn integraaliin liittyvät käsitteelliset virheet
Integrointivakion käyttäminen määrättyssä integraalissa	
Integrointivakion puuttuminen	Integraalifunktion liittyvät käsitteelliset virheet
Jakaminen "puolittain" integraalifunktiosta	
Integraalifunktion ja integrandin merkitseminen yhtäsuuriksi	
Virheet integrointimerkin käyttämisessä	Integrointiin liittyvät käsitteelliset virheet
Virheet merkinnän dx käyttämisessä	

$$\int t^2 \sin(t) dt = \frac{1}{3} t^3 - \cos(t) + C$$

$$\begin{aligned}
 F(t) &= -\cos(t) \cdot t^2 - \int -\cos(t) \cdot 2t dt \\
 &= -\cos(t)t^2 + 2 \int \cos(t) \cdot t dt \\
 &= -\cos(t)t^2 + 2(\sin(t) \cdot t - \int \sin(t) \cdot 1 dt) \\
 &= -\cos(t)t^2 + 2\sin(t)t - (-\cos(t)) + C \\
 &= -\cos(t)t^2 + 2\sin(t) \cdot t + 2\cos(t) + C \quad \parallel : \cos(t) \\
 &= -t^2 + 2 \tan(t) \cdot t + 2 + C
 \end{aligned}$$

Määrällisen tutkimuksen tulokset

- Käänteisen mallin opiskelijat tekivät perinteisen mallin opiskelijoita vähemmän käsitteellisiä virheitä
 - etenkin opintojaksolla Insinöörimatematiikka 1
- Proseduraalisten virheiden kohdalla ei juurikaan eroa opetusmenetelmien välillä
- Yleisin opiskelijoiden tekemä virhe oli tulontekijöiden integrointi erikseen

Pohdintaa

- Kerätty aineisto melko suppea
 - Yhteensä tenttejä jäi analysoitavaksi ensimmäiseltä kurssilta 23 ja toiselta 18
- Tutkimukseen osallistuneita oli eri määrä käänteiseltä ja perinteiseltä mallilta
- Tehtävät mittasivat lähinnä proseduraalista sujuvuutta
- Opiskelijoilla vaikeuksia ennakkotiedoissa kuten funktioissa ja perusintegroinnissa

Kiitos!